量子ウォークにとって居心地の良い場所はどこか

瀬川悦生 (横浜国立大学)

有限グラフの外部からの流出入がある量子ウォークモデルは, ドレスト光子の粗視化モデルとしても提案されています [1, 2]. この流入の振動数に応じて, 時刻が十分に経過したときの最終的な応答は, 固定点に収束したり, 周期解になったりします. この流入量の振動数は, 固定されたグラフの立場からすると, ある周期で揺らされていると解釈できます. ゆりかごに入っている赤ちゃんにとって, ゆっくり揺らせばスヤスヤ, 激しく揺らせば, 泣き出してしまいます. そこで, ゆりかごがグラフ, 量子ウォーカーを赤ちゃんと見立てて, 彼 (彼女?) にとってどのような振動を「心地良いと」思うのかについて考察してみます.

グラフ内部に時刻無限大で量子ウォーカーが, たくさん存在していれば, それだけ居心地がよいと解釈することにしましょう. そのため, 振動数 ω に対する量子ウォーカーの居心地の良さの指標として, このようなものを導入しました.

$$\mathcal{E}_{QW}(\omega) := \frac{1}{2}||\psi_\infty||_G^2.$$

ここで, ψ_∞ は定常状態, $||\cdot||_G$ は与えられた有限グラフ G に制限した ℓ^2-ノルムです. これを量子ウォーカーの Comfortability と呼びます.

ここまでは一般的な設定の話で, これから, 具体的な設定にして考えてみたい思います. 実は Comfortability はグラフと振動数の関数になっていますので, 今回はグラフをサイズ M の有限パスグラフに固定して, 考えますが, 振動数を 0 や π に固定してに, どのようなグラフが居心地よいのかという議論もありますので興味があればこちらを参考んしてください [4]. 内部のグラフでは各頂点に配置された以下のような 2 次元のユニタリ行列に従って時間発展が決まるとしましょう.

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

対角成分は量子ウォーカーが, 頂点にぶつかったときに, ぶつかってきた方向と, また同じ方向に進んだときに付随する複素数重み, 一方で, 非対角成分は反対側に方向転換したときに付随する複素重みになります. ユニタリ性から $|a|^2 = |d|^2 =: p$, $|b|^2 = |c|^2 =: q$, さらに $p+q=1$ などが成立します. この移動に付随する重みが実数ではなく複素数ですが, 2 乗すると確率が保存されるところが, ユニタリ時間発展で決まる量子ウォークのウォークの前に「量子」がつく所以です. さて, [3] によると, 次のことが解っています.

$$\mathcal{E}_{QW}(\omega) \in \begin{cases} O(1) & : |\cos\omega| > |a| \\ O(M) & : |\cos\omega| = |a| \\ O(M^3) & : |\cos\omega| < |a|,\ M \asymp 1/|\theta|,\ M|\theta| \in \mathbb{Z}\pi \\ O(M) & : \text{それ以外} \end{cases} \tag{0.1}$$

但し, $\theta := \arccos(\cos\omega/|a|)$. つまり, 振動数が $|\cos\omega| > |a|$ だと量子ウォーカーは居心地が最悪で, それ以外の振動数に対しては大体, システムサイズ N のオーダーで内部に滞在し, 非常にレアな振動数ではあるが, 繊細にシステムサイズに対して入力振動数をチューンすれば実は N^3 のオーダーの最大 Comfortability を与えることができることになります. なぜそうなるのかは, 計算を地道に行ったらそうなったとしか, 今のところ言えず, 定性的な説明は今後の課題です.

いずれにしても, 少しこのことは傍らに置き, 量子ウォーカーがどのような揺らし方がお好みなのかは明らかになっているので, さらなる興味が湧いてきます. つまり, 彼 (彼女?) のことをもっと知りたいと思うのなら, 「有限パスのどの辺りが特に居心地よいのか」です. すると, 次のようなことがわかったので, 報告します [5]. 横軸としてパスの位置をサイズ M で割って $[0,1]$ 区間に規格化したもの, 縦軸として対応する各頂点の相対確率を Comfortability で正規化した確率分布をった棒グラフよって, どこが居心地よいのかが見て取れます. すると, このサイズ M で規格化された確率分布は ω に応じて $\rho_\omega(x)$ という密度関数をもつ確率分布に弱収束します. ここで, $\rho_\omega(x)$ はつぎのようになります.

Theorem 1 ([5])**.**

$$\rho_\omega(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \times \begin{cases} \delta(x) & : \textit{(i)}\ |\cos\omega| > |a| \\ 3(1-x)^2 & : \textit{(ii)}\ |\cos\omega| = |a|\ \textit{or}\ \text{“}|\cos\omega| < |a|,\ |\theta| \ll 1/M\text{”} \\ c(\theta_*)\sin^2[(1-x)\theta_*] & : \textit{(iii)}\ |\cos\omega| < |a|,\ |\theta| \asymp 1/M,\ 0 < |\theta|M =: \theta_* < \infty \\ 1 & : \textit{(iv)}\ \text{それ以外} \end{cases}$$

但し $c(\theta_*)$ は規格化定数.

振動数 ω に依存して, 上記のように 4 種類の確率密度がでてきましたが, 例えば, $|\cos\omega| > |a|$ のときは, 入口に入った瞬間に, 居心地の悪さを感じ, 外に出て行ってしまいます. また, (iii) の場合を見ると, θ_* が小さくなると, 多項式になり, θ_* が大きくなると, 振動が激しくなり, 累積分布として一様分布に近づいていくことがわかりますので, この場合が本質的であることがわかります.

ここまでまとめるのに計算の重労働がありましたが結果は大変綺麗なのに驚いています. この背後には我々の計算の途中で何か見落としている本質をつくような構造があるはずなのですが, 今のところ未解決になっています.　近い将来これが驚きではなくなるような知見が得られると期待しています. そしてこの蓄積されたエネルギーを外部に対してどのように取り出すかを考察することにより, ドレスト光子の出力をあげるための応用に繋がるのではないかと考えていますが, これも楽しみな今後の課題です.

References

[1] M. Hamano, H. Saigo, Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science 315 pp.93–99.

[2] M. Ohtsu, Offshell: 10.14939/2201R.001.v1.

[3] K, Higuchi, T. Komatsu, N. Konno, H. Morioka, E. Segawa, Symmetry 13 (2021) 1134.

[4] Yu. Higuchi, M. Sabri, E. Segawa, arXiv:2201.01926 (2022).

[5] Y. Anahara, N. Konno, H. Morioka, E. Segawa, arxiv.2203.04108 (2022).